Mathematisches Institut der Universität München, WISE 2019/20

Übungen zur Mathe III für Physiker

Prof.Dr.P.Pickl

Blatt 7

Aufgabe 1: Gegeben sei das Vektorfeld $\underline{\boldsymbol{v}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\underline{\boldsymbol{v}}(x, y, z) = \begin{pmatrix} -2xz^3 \\ -2yz^3 \\ 3z^2 \end{pmatrix}$.

1. Zeigen Sie, dass $\underline{\boldsymbol{v}}$ nicht als Gradient einer reellwertigen Funktion ausdrückbar ist!
2. Finden Sie nun einen integrierenden Faktor für $\underline{\boldsymbol{v}}$, also eine nullstellenfreie Funktion $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ g(x, y, z) \neq 0\ \forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$, sodass $g\underline{\boldsymbol{v}}$ Gradient einer reellwertigen Funktion ist!

   Hinweis: Es genügt ein spezielles g zu finden, insbesondere muss dieses nicht von allen Variablen abhängen.
3. Berechnen Sie das Integral
$$\int_\gamma \underline{\boldsymbol{v}} \cdot ds,$$
   wobei die Kurve γ durch $\underline{\phi} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$,
   $\underline{\phi}(t) = \begin{pmatrix} a\cos t \\ b\sin t \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}^+ \backslash \{0\},\ a \neq b$
   parametrisiert wird.
   Wieso hätten Sie dieses Ergebnis erwarten können?

Aufgabe 2: Gegeben sei das Vektorfeld

$$\underline{\boldsymbol{v}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \underline{\boldsymbol{v}}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \begin{pmatrix} x - y \\ x + y \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_{S^1(R)} \underline{\boldsymbol{v}} \cdot d\underline{\boldsymbol{s}},$$

wobei $S^1(R) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = R\}$ ein Kreis mit Radius R ist, einerseits explizit und andererseits durch Anwendung des Satzes von Stokes für den $\mathbb{R}^3$!

Tipp: Ergänzen Sie für den zweiten Teil v um eine z-Komponente, sodass Sie den Satz von Stokes für den dreidimensionalen Raum anwenden können!

Aufgabe 3: In dieser Aufgabe wird gezeigt, dass eine Kontinuitätsgleichung zu einer Erhaltungsgrösse führt. Dies spielt in vielen Bereichen der Physik, z.B. der Elektrodynamik, der Fluidmechanik und der Quantenmechanik, eine wichtige Rolle. Eine *Kontinuitätsgleichung* ist eine Gleichung der Form

$$\nabla . \underline{\boldsymbol{j}}(t, \underline{\boldsymbol{x}}) \;=\; -\frac{\partial \rho(t, \underline{\boldsymbol{x}})}{\partial t}.$$

Hierbei bezeichnet $\underline{\boldsymbol{j}} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ einen *Strom* und $\rho : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine *Dichte*. (Immer wenn Sie die Wörter "Strom" und "Dichte" hören, bezieht sich das auf eine Kontinuitätsgleichung.) Die Divergenz $\nabla . \underline{\boldsymbol{j}}(t, \underline{\boldsymbol{x}}) = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial j_k}{\partial x_k}$ bezieht sich nur auf die Raumvariablen. Definieren Sie die Grösse

$$Q(t) = \int_{\mathbb{R}^3} \rho(t, \underline{\boldsymbol{x}})\, d^3x.$$

1. Zeigen Sie unter der Annahme, dass $\underline{\boldsymbol{j}}(t, \underline{\boldsymbol{x}}) \cdot |\underline{\boldsymbol{x}}|^2$ für $|\underline{x}| \to \infty$ gegen Null geht, dass $\frac{dQ(t)}{dt} = 0$ gilt, dass also der Wert von Q in der Zeit erhalten ist! Benutzen Sie dafür die Kontinuitätsgleichung oben sowie den Satz von Gauss!

2. Bezeichne Vektoren im $\mathbb{R}^4$ nun als $x = (x^\mu)_{\mu=0,1,2,3} = (x^0, x^1, x^2, x^3)$. Hierbei: $x^0 = t$. Definieren Sie den 4-er Strom als $j(x)$ mit $j^0 = \rho$, $(j^1, j^2, j^3) := \underline{j}$. Zeigen Sie, dass man Q ausdrücken kann als:

$$Q(t) \;=\; \int_{\Sigma_t} j^\mu(x)\, d\sigma_\mu, \qquad \text{(Summation über } \mu = 0, 1, 2, 3\text{)},$$

   wobei $\Sigma_t := \{x \in \mathbb{R}^4 : x^0 = t\}$ eine flache raumartige HyperflÃche im $\mathbb{R}^4$ ist und $d\sigma_\mu = n_\mu\, d\sigma$ das orientierte Hyperflächenelement ($d\sigma$ ist selbst ein 3-dimensionales Volumenelement und $n = (n_\mu)_{\mu=0,1,2,3}$ der 4-dimensionale Normalen(ko)vektor).